2019(平成31)年度　私学教員適性検査　解答・解説　　【数学】

$\boxed{1}$

(1)　$6\sqrt{3}$	(2)　$0<a<1$	(3)　$\dfrac{90}{7}$
(4)　6	(5)　0.5	(6)　11個
(7)　-1	(8)　$f'(x)=2\cos 2x$	(9)　$\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$
(10)　$z=-4$		

解説

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ より $xy=-1$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6\sqrt{3}$

(2)　$f(x)=2x^2-3x+a$ とおくと，

0 と 1 の間に解をもつので，$f(0)\cdot f(1)<0$ これを解くと $0<a<1$

1 と 2 の間にも解をもつので，$f(1)\cdot f(2)<0$　　よって $-2<a<1$

よって求める a の範囲は $0<a<1$

(3)　各分母の最大公約数90をかければ，すべての分数は分母が約分して 1 となる。

また，分子は最小公倍数 7 なので，分母は最大 7 とできる。よって $\dfrac{90}{7}$

(4)　19 を法とした合同式で考えると

$5^9=125^3\equiv 11^3=121\cdot 11\equiv 7\cdot 11=77=1\ (\mathrm{mod}19)$

$\therefore\ 5^{2000}=(5^9)^{228}\cdot 5^2\equiv 1\cdot 25\equiv 6$

よって，5^{2000} を19で割った余りは 6 である。

(5)　x の平均 $\overline{x}=1$ ，y の平均 $\overline{y}=2$

x の分散 ${s_x}^2=\dfrac{(-1)^2\cdot 8+1^2\cdot 8}{20}=\dfrac{4}{5}$ ，y の分散 ${s_y}^2=\dfrac{(-1)^2\cdot 4+1^2\cdot 4}{20}=\dfrac{2}{5}$

x ，y の共分散 $s_{xy}=\dfrac{(-1)\cdot(-1)\cdot 4+1\cdot 1\cdot 2}{20}=\dfrac{3}{10}$

相関係数 $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\dfrac{3}{10}\div\sqrt{\dfrac{4}{5}}\div\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=0.525$

よって求める相関係数 $r=0.5$ である。

※　問題では $\sqrt{3}=1.7$ と指定されていますが，出題ミスと思われます。

ここでは $\sqrt{2}=1.4$ を利用しました。

(6)　真数条件により $n-1>0$ かつ $n+5>0$ ，$n>0$ なので，$n>1$ …①

$-\log_{\frac{1}{2}}(n+5)=-\dfrac{\log_2(n+5)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\dfrac{\log_2(n+5)}{-1}=\log_2(n+5)$ なので，

$\log_2(n-1)-\log_{\frac{1}{2}}(n+5)\leqq 4+\log_2 n$

$$\log_2(n-1)+\log_2(n+5) \leqq \log_2 2^4+\log_2 n$$

$$\log_2(n-1)(n+5) \leqq \log_2 16n$$

底 $2>1$ なので　$(n-1)(n+5) \leqq 16n$

これを解くと $6-\sqrt{41} \leqq n \leqq 6+\sqrt{41}$ …②

①，②より $1<n<6+\sqrt{41}$

$12<6+\sqrt{41}<13$ より $n=2,3,\cdots,12$　　　よって当てはまる n は 11 個

(7)　$t=-x$ とおくと，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+t+1}\right)$$

分子の有理化を行うと

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}=\frac{-2}{1+1}=-1$$

(8)　$f(x)=\int_{\pi}^{2x}\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_{\pi}^{2x}=\sin 2x$

$\therefore f'(x)=2\cos 2x$

(9)　$I=\int e^x\cos x\,dx$ と置くと

$$I=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$$

$$=e^x\cos x+\left\{e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\right\}$$

$$=e^x(\sin x+\cos x)-I$$

$$\therefore 2I=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$I=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}$$

(10)　4点 A,B,C,D が同一平面上にある。$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=r\,\overrightarrow{OA}+s\,\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OC}$

ただし，$r+s+t=1$

よって，$\begin{pmatrix}7\\-2\\z\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ となるので，

$\begin{cases}r+s+t=1\\7=r+0+0\\-2=0+s+0\\z=0+0+t\end{cases}$ が成立する。これを解くと，$\begin{cases}r=7\\s=-2\\t=-4\\z=-4\end{cases}$　　ゆえに $z=-4$

$\boxed{2}$

(1)　$3<a\leqq 4$	(2)　$x=\pm 1$ のとき，最小値 $-\dfrac{45}{4}$
(3)①　$\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$　　②　$\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$	(4)　$xy=1$
(5)①　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{12}\overrightarrow{AC}$	②　$k=\dfrac{4}{7}$
(6)　30 組　　(7)　67 個	(8)　$\dfrac{\pi^2}{4}$
(9)　$(x, y, z)=(4, 5, 20)$，$(4, 6, 12)$	
(10)①　$f(x)=\cos x-\dfrac{3}{\pi}x+4$	②　$2\pi^3-4\pi$

解説

(1)　$\begin{cases}2x^2-3x-5>0\\x^2+(a-3)x-2a+2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-5)(x+1)>0\\(x-2)(x+a-1)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-1,\ \dfrac{5}{2}<x\\1-a<x<2\end{cases}$

（ただし，$a\geqq 0$ より $1-a<2$）

よって，この連立方程式の整数解が 1 つとなるのは $x=-2$ のとき

つまり $-3\leqq 1-a<-2$ となるとき。これを解くと　$3<a\leqq 4$

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，$t^2=4^x+2+4^{-x}$ より $4^x+4^{-x}=t^2-2$

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ なので相加相乗平均により，$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

また，$y=t^2-2-5t-3=\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{45}{4}$

よって，$t=\dfrac{5}{2}$ のとき，すなわち $x=\pm 1$ のとき，最小値 $-\dfrac{45}{4}$ をとる。

(3)①　外接する球の中心を O とする。

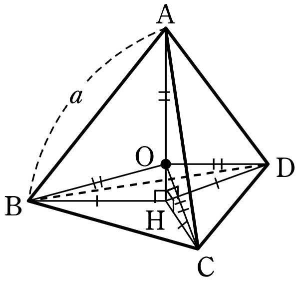
点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす。

△ABH，△ACH，△ADH は合同な直角三角形で

あるから　　BH＝CH＝DH

よって，H は △BCD の外心である。

△BCD は 1 辺の長さが a の正三角形であるから，



正弦定理により　　$\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=2\text{BH}$

ゆえに　　$\text{BH}=\dfrac{a}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

△ABH において，三平方の定理により　　$\text{AH}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

また，球の中心 O は，線分 AH 上にある。

さらに，正四面体 ABCD は合同な 4 つの正三角錐 OBCD，OABC，OACD，OABD に分割できる。

よって　　AH：OH＝(正四面体 ABCD の体積)：(正三角錐 OBCD の体積)

$=4:1$

ゆえに，O は線分 AH を 3 : 1 に内分する点であり

$$\mathrm{OA}=\frac{3}{4}\mathrm{AH}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

したがって，求める球の半径は　$\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$

(3)②　①より　$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{4}\mathrm{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

(4)　$x=r\sin\theta$ ，$y=r\cos\theta$ より $r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta=2$ なので，$xy=1$

(5)①　$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+5\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\vec{0}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

②　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}=\dfrac{9}{12}\cdot\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}$ となるので，APとBCの交点をDとすると，

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=5:4$ ，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=3:1$ となる。

ゆえに，メネラウスの定理より $\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=4:3$

よって，$k=\dfrac{4}{7}$

(6)　・辺と辺　全ての組合せから，隣り合う組合せを引けばよい。

$${}_6\mathrm{C}_2-6=9\text{ 組}$$

・対角線と対角線　平行の3組のみ

・辺と対角線　一辺に対して共有点を持たない対角線は3本あるので，$3\times6=18$ 組

よって，$9+3+18=30$ 組

(7)　Aの要素を満たす数列は $5+4(n-1)=4n+1$　　$\therefore n(\mathrm{A})=49$

B の要素を満たす数列は $1+6(n-1)=6n-5$　　$\therefore n(\mathrm{B})=34$

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$の要素を満たす数列は $13+12(n-1)=12n+1$　　$\therefore n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=16$

よって，$n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=49+34-16=67$

(8)　求める図形は z 軸を中心に持つ，半径 $\cos t$ の円の積み重ねたものなので，

$$\text{体積 } V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 t\,dt=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\pi\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

(9)　$x<y<z$ より $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}$ なので，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{3}{x}$　　$\therefore \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{6}$

$x=4$ のとき，

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　となるので，両辺に $4yz$ をかけると，$4z+4y=yz$

これを整数の範囲で解くと，$(y,z)=(5,20),(5,12)$

$x=5$のとき同様に考えると，整数解はなし。

$\therefore (x,y,z)=(4,5,20),(4,6,12)$

(10)①　$f''(x)=-\cos x$ より

$f'(x)=-\sin x+C_1$ ，$f(x)=\cos x+C_1x+C_2$　ただし C_1,C_2 は定数とする。

$f(0)=5$ より $1+C_2=5$ ，$C_2=4$

$f(\pi)=0$ より，　$-1+\pi C_1+4=0$，　$C_1=-\dfrac{3}{\pi}$

よって，$f(x)=\cos x-\dfrac{3}{\pi}x+4$

②　y 軸で回転させるので，回転体の体積 V は

$$V=\int_0^5 \pi x^2 dy=\int_\pi^0 \pi x^2\cdot\frac{dy}{dx}\,dx=\int_\pi^0 \pi x^2\left(-\sin x-\frac{3}{\pi}\right)dx$$

$$=\int_0^\pi(\pi x^2\sin x+3x^2)dx=\Big[-\pi x^2\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 2\pi x\cdot(-\cos x)dx+\Big[x^3\Big]_0^\pi$$

$$=\pi^3-0+\Big[2\pi x\cdot\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 2\pi\cdot\sin x\,dx$$

$$=\pi^3-\Big[-2\pi\cos x\Big]_0^\pi=\pi^3-(2\pi+2\pi)=\pi^3-4\pi$$

$\boxed{3}$

(1) $f'(x)=\dfrac{-3x^4+3}{(x^4+3)^2}$　　(2) $-\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{4}$

(3) $-\dfrac{1}{4}<t<0,\ 0<t<\dfrac{1}{4}$

(解説)

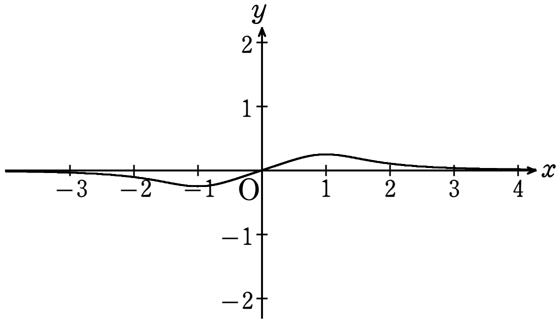
(1) $f'(x)=\dfrac{x^4+3-x\cdot 4x^3}{(x^4+3)^2}=\dfrac{-3x^4+3}{(x^4+3)^2}$

(2) $f'(x)=0$ を解くと， $x=\pm 1$

増減表・グラフを書くと

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$



よって， $-\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{4}$

(3) $tx^4-x+3t=0$ を t について解くと， $t=\dfrac{x}{x^4+3}$

よって， $y=\dfrac{x}{x^4+3}$ と $y=t$ との共有点の個数が 2 個になるのは，(2)のグラフより，

$-\dfrac{1}{4}<t<0,\ 0<t<\dfrac{1}{4}$ のときである。

ゆえに，実数解の個数が2個となるときの t の範囲も $-\dfrac{1}{4}<t<0,\ 0<t<\dfrac{1}{4}$ である。

$\boxed{4}$

(1)　$a \leqq 0$ のとき，　$f(a) = -\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{3}$

$0 < a < 1$ のとき，$f(a) = \dfrac{1}{3}a^3 - \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{3}$

$1 \leqq a$ のとき，　$f(a) = \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{3}$

(2)　最小値　$-\dfrac{\sqrt{2}}{6} + \dfrac{1}{3}$ $\left(a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right)$

(解説)

(1)　①　$a \leqq 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ で $x(x-a) \geqq 0$ となる。

よって，$f(a) = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a$

②　$0 < a < 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq a$ で，$x(x-a) \leqq 0$

$a \leqq x \leqq 1$ で，$x(x-a) \geqq 0$ となる。

よって，$f(a) = \displaystyle\int_0^a -(x^2 - ax)\,dx + \int_a^1 (x^2 - ax)\,dx = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$

③　$1 \leqq a$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ で $x(x-a) \leqq 0$ となる。

よって，$f(a) = \displaystyle\int_0^a -(x^2 - ax)\,dx = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}$

(2)　$f(a)$ のグラフを書くと右図のようになるので，

$f(a)$ の最小値は $f(a) = \dfrac{1}{3}a^3 - \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{3}$ の最小値

である。

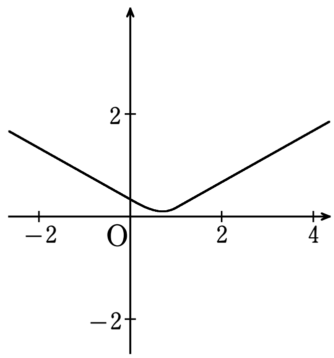
両辺を a で微分すると，

$f'(a) = a^2 - \dfrac{1}{2}$

よって，$f'(a) = 0$ となるのは $a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leqq a \leqq 1$ より，$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，

最小値　$-\dfrac{\sqrt{2}}{6} + \dfrac{1}{3}$ をとる。



$\boxed{5}$

(1) $a_1=\dfrac{4}{5}$ ， $a_2=\dfrac{17}{25}$ (2) $a_{n+1}=\dfrac{3}{5}a_n+\dfrac{1}{5}$

(3) $a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\dfrac{1}{2}$ ， $\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $a_2=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{17}{25}$

(2) $a_{n+1}=a_n\times\dfrac{4}{5}+(1-a_n)\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}a_n+\dfrac{1}{5}$

(3) $a_{n+1}=\dfrac{3}{5}a_n+\dfrac{1}{5}$ を変形すると， $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{5}\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$

$a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$ より，数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $\dfrac{3}{10}$ ，公比 $\dfrac{3}{5}$ の等比数列

$$\therefore\quad a_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{2}$$

また， $-1<\dfrac{3}{5}<1$ より， $\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}\cdot0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$